

Reg. No. : .....

Code No. : 30573 B Sub. Code : SMMA 41

B.Sc.(CBCS) DEGREE EXAMINATION,  
NOVEMBER 2020.

Fourth Semester

Mathematics — Core

ABSTRACT ALGEBRA — I

(For those who joined in July 2017 onwards)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — ( $10 \times 1 = 10$  marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer :

1.  $(Q^*, \cdot)$  ல் 1 ன் நேர்மாறு

(அ)  $-1$

(ஆ)  $0$

(இ)  $1$

(ஈ)  $\infty$

In the group  $(Q^*, \cdot)$ , the inverse of 1 is

(a)  $-1$

(b)  $0$

(c)  $1$

(d)  $\infty$

2. பின்வருவனவற்றுள் எது  $(C^*, \cdot)$  யின் உட்குலம் இல்லை?

(அ)  $\{1, i, -1, i\}$  (ஆ)  $\{1, -1\}$

(இ)  $\{1\}$  (ஈ)  $\{i, -i\}$

Which of the following are not subgroups of  $(C^*, \cdot)$ ?

(a)  $\{1, i, -1, i\}$  (b)  $\{1, -1\}$

(c)  $\{1\}$  (d)  $\{i, -i\}$

3.  $(Z_{12}, \oplus)$  என்ற குலத்தில் உள்ள பிறப்பாக்கிகளின் எண்ணிக்கை

(அ) 1, 2, 3, 4 (ஆ) 1, 3, 6, 9

(இ) 1, 5, 7, 11 (ஈ) 2, 3, 5, 7, 11

The set of all generators of group  $(Z_{12}, \oplus)$  is

(a) 1, 2, 3, 4 (b) 1, 3, 6, 9

(c) 1, 5, 7, 11 (d) 2, 3, 5, 7, 11

4.  $G$  என்பது ஒரு முடிவுறுகுலம்.  $H$  என்பது  $G$  யின் உட்குலம் எனில்,  $O(H)$  ஆனது  $O(G)$  ஐ வகுக்கும்.

(அ) லெக்ராஞ்சியின் தேற்றம்

(ஆ) பெர்மாட்டின் தேற்றம்

(இ) ஆய்லரின் தேற்றம்

(ஈ) கோஸியின் தேற்றம்

“If  $G$  is a finite group and  $H$  is any subgroup of  $G$  then the order of  $H$  divides the order of  $G$ ”.  
This theorem is known as

- (a) Lagrange's theorem
- (b) Fermat's theorem
- (c) Euler's theorem
- (d) Cauchy's theorem

5. இரண்டு ஒற்றை வரிசை மாற்றத்தின் பெருக்கல் ஓர்

- (அ) இரட்டை வரிசை மாற்றம்
- (ஆ) சுழல்
- (இ) ஒற்றை வரிசை மாற்றம்
- (ஈ) இதில் எதுவுமில்லை

The product of two odd permutations is an

- (a) even permutation (b) cycle
- (c) odd permutation (d) none of these

6.  $f : (Z, +) \rightarrow (C^*, \cdot)$  என்ற சார்பு  $f(n) = i^n$  என்று  
வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது எனில்  $f$  ஒரு

- (அ) ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு
- (ஆ) செயல்கோர்த்தல்
- (இ) மேலான சார்பு
- (ஈ) இவை எதுவுமில்லை

The map  $f : (Z, +) \rightarrow (C^*, \cdot)$  given by  $f(n) = i^n$  is

- (a) one-one (b) a homomorphism  
(c) onto (d) none of these

7.  $(Q, +, 1)$  என்ற வளையத்தின் சிறப்பு எண்

- (அ) 1 (ஆ) 0  
(இ) முடிவுறாதது (ஈ) 4

The characteristic of the ring  $(Q, +, 1)$  is

- (a) 1 (b) 0  
(c) infinite (d) 4

8. ஒரு வளையம் பூலியன் வளையம் எனில் —————

- (அ)  $a^2 = e$  அனைத்து  $a \in R$  என்பது பெருக்கல் சமனி  
(ஆ)  $a^2 = e$  அனைத்தும்  $a \in R$   
(இ)  $a^2 = 0$  அனைத்தும்  $a \in R$   
(ஈ)  $a^n = 0$  ஏதேனும்  $n \in R$

A ring is called a Boolean ring if

- (a)  $a^2 = e$  for all  $a \in R$ , where  $e$  is the multiplicative identify  
(b)  $a^2 = e$  for all  $a \in R$   
(c)  $a^2 = 0$  for all  $a \in R$   
(d)  $a^n = 0$  for some  $n \in R$

9.  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$ ,  
 $q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$  என்பவை  $F[x]$  ன் உறுப்புகள்.  
 $p(x) = q(x)$  ஆக இருக்க தேவையான மற்றும்  
 போதுமான நிபந்தனை \_\_\_\_\_

(அ)  $a_i > b_i, \forall i \geq 0$  (ஆ)  $a_i = b_i, \forall i \geq 0$

(இ)  $a_i = 0 = b_i, \forall i \geq 0$  (ஈ)  $a_i \neq b_i$

$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$ ,

$q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$  are defined in  $F[x]$ . Then  
 the sufficient and necessary condition for  
 $p(x) = q(x)$  is

(a)  $a_i > b_i, \forall i \geq 0$  (b)  $a_i = b_i, \forall i \geq 0$

(c)  $a_i = 0 = b_i, \forall i \geq 0$  (d)  $a_i \neq b_i$

10.  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  என்ற சார்பு  $f(x) = x^2 + 3$  என  
 வரையறுக்கப்படுகிறது எனில்  $f$  என்பது

(அ) செயல்மாறா கோர்த்தல் வளையம்

(ஆ) செயல்மாறா கோர்த்தல் வளையம் அல்ல

(இ) இயல்மாறா கோர்த்தல் வளையம்

(ஈ) முழு ஒப்புமை வளையம்

The map  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  defined by  $f(x) = x^2 + 3$  is

(a) a ring homomorphism

(b) not a ring homomorphism

(c) a ring isomorphism

(d) a ring epimorphism

PART B — ( $5 \times 5 = 25$  marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

Each answer should not exceed 250 words.

11. (அ)  $H, K$  என்பன  $G$  யின் உட்குலங்கள் எனில்  $H \cap K$  யும்  $G$  யின் உட்குலம் என்பதை நிறுவுக.

If  $H$  and  $K$  are subgroups of a group  $G$  then prove that  $H \cap K$  is also a subgroup of  $G$ .

Or

- (ஆ)  $G$  ஒரு குலம் எனில் அதன் மையம்  $Z(G)$  என்பது  $G$  யின் உட்குலம் என்பதை நிறுவுக.

Prove that the center of  $G$   $Z(G)$  is a subgroup of  $G$ .

12. (அ) லெக்ராஞ்சியின் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

State and Prove Lagrange's theorem.

Or

- (ஆ) ஒவ்வொரு வட்டக்குலமும் அபிலியன் குலம் ஆகும் என நிறுவுக.

Prove that any cyclic group is abelian.

13. (அ)  $f: G \rightarrow G'$  ஒரு செயல்மாறாக் கோர்த்தல் எனில்  $f$  ன் உட்கரு  $G$  யின் ஒரு நேர்மை உட்குலமாகும் என நிறுவுக.

Let  $f: G \rightarrow G'$  be a homomorphism. Prove that the Kernel  $K$  of  $f$  is a normal subgroup of  $G$ .

Or

- (ஆ)  $I(G)$  என்பது  $AutG$  யின் நேர்மை உட்குலம் நிறுவுக.

$I(G)$  is a normal subgroup of  $AutG$  prove.

14. (அ) ஒவ்வொரு களமும் எண்ணரங்கமாகும் என்பதை நிரூபணம் செய்க.

Prove that any field  $F$  is an integral domain.

Or

- (ஆ) ஒரு எண்ணரங்கத்தின் சிறப்பு எண் என்பது பூஜ்ஜியம் அல்லது பகா எண் என்பதை நிறுவுக.

Prove that the characteristic of an integral domain is either 0 or a prime number.

15. (அ)  $f: Z \rightarrow Z_n$  என்ற சார்பு  $f(x) = r$ ,  $r$  என்பது  $x = qn + r$ ,  $0 \leq r < n$  என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது எனில்  $f$  என்பது செயல்மாறாக் கோர்த்தல் என நிறுவுக.

If  $f: Z \rightarrow Z_n$  defined by  $f(x) = r$ , where  $x = qn + r$ ,  $0 \leq r < n$  then prove that  $f$  is homomorphism.

Or

(ஆ)  $R[x]$  என்பது ஒரு எண்ணரங்கம் எனில்  $R$  என்பதும் ஒரு எண்ணரங்கம் ஆகும் என்பதை நிறுவுக.

Prove that  $R[x]$  is an integral domain iff  $R$  is an integral domain.

PART C — ( $5 \times 8 = 40$  marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

Each answer should not exceed 600 words.

16. (அ)  $G\{(a,b) | a \in R^*, b \in R\}$  இதில்  $(a,b)*(c,d) = (ac, bc+d)$  என வரையறுக்கப்பட்டால்  $(G, *)$  ஒரு குலம் என காட்டுக.

Let  $G\{(a,b) | a \in R^*, b \in R\}$ . Then prove that  $G$  is a group under the operation  $*$  defined by  $(a,b)*(c,d) = (ac, bc+d)$ .

Or

- (ஆ) குலம்  $G$  யின் இரு உட்குலங்களின் சேர்ப்பு கணம்  $G$  யின் உட்குலமாக இருக்க தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை ஒன்று மற்றொன்றின் உள் அமையும் என நிரூபி.

Prove that the union of two subgroups of a group  $G$  is a subgroup iff one is contained in the other.

17. (அ) ஆயிலரின் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபிக்கவும்.

“State and prove Euler’s theorem.”

Or

(ஆ)  $H, K$  என்பன  $G$  என்ற குலத்தின் முடிவுறு

உட்குலங்கள் எனில்  $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$  என நிறுவுக.

Let  $H, K$  be any two finite subgroups of a

group  $G$ . Then prove that  $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$ .

18. (அ) கெய்லியின் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

State and prove Cayley’s theorem.

Or

(ஆ) செயல்மாறாக் கோர்த்தலின் அடிப்படைத் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

State and prove fundamental theorem of homomorphism.

19. (அ)  $(Z_n, \oplus, \odot)$  என்பது ஒரு வளையம் என்பதை நிரூபி.

Prove that  $(Z_n, \oplus, \odot)$  is a ring.

Or

(ஆ)  $R$  என்பது சமனி உறுப்புடைய பரிமாற்று வளையம் என்க. சீர்மம்  $M$  என்பது  $R$  ன் மீப்பெரு சீரிய வளையமாக இருப்பதற்கு தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை  $R/M$  ஒரு களமாகும் என நிறுவுக.

Let  $R$  be a commutative ring with identify. Prove that the ideal  $M$  of  $R$  is maximal iff  $R/M$  is a field.

20. (அ) செயல்மாறாக் கோர்த்தலின் அடிப்படைத் தேற்றத்தை வளையத்தில் எழுதி நிறுவுக.

State and prove fundamental theorem of homomorphism of rings.

Or

(ஆ)  $F[x]$  ல்  $f(x)$ ,  $g(x)$  என்பன இரு உறுப்புகள். இதில்  $g(x) \neq 0$  எனில்  $F[x]$  ல் பல்லுறுப்புக் கோவைகள்  $q(x)$  மற்றும்  $r(x)$  என்பவை  $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$  என இருக்கும். இங்கு  $r(x) = 0$  அல்லது  $r(x)$  ன் படி  $g(x)$  ன் படியை விட சிறியது என நிரூபி.

Let  $F$  be a field. Let  $f(x)$  and  $g(x)$  be two polynomials in  $F[x]$  with  $g(x) \neq 0$ . Then prove that there exist unique polynomial  $q(x)$  and  $r(x)$  such that  $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ , where either  $r(x) = 0$  or  $\deg r(x) < \deg g(x)$ .